Central European Forum for Migration and Population Research

Środkowoeuropejskie Forum Badań Migracyjnych i Ludnościowych

Bayesowskie prognozy migracji zagranicznych w Europie: wybrane propozycje metodologiczne

Jakub Bijak

Środkowoeuropejskie Forum Badań Migracyjnych i Ludnościowych w Warszawie

Ogólnopolskie Seminarium Naukowe „Dynamiczne Modele Ekonometryczne”

Toruń, 4–6 września 2007 r.

Projekt finansowany z grantu badawczego Fundacji na rzecz Ludności, Migracji i Środowiska (BMU-PME) z Zurychu

Plan prezentacji

1. Wybór modeli w ujęciu bayesowskim: wprowadzenie
2. Ilustracja empiryczna: prognoza migracji między Polską a Niemcami na lata 2005–2015
   - Proste procesy stochastyczne z klasy ARMA(1,1)
   - Modele ze zmienną wariancją warunkową
   - Prognozowanie przez analogię
3. Odporność prognoz na zmiany wybranych rozkładów *a priori*
4. Podsumowanie i wnioski

1. Wybór modeli w ujęciu bayesowskim

Teoria: niepewność dotycząca specyfikacji modelu

- Niech M_1, …, M_m będą wzajemnie wykluczającymi się modelami składającymi się na skończoną przestrzeń **M**
- Niech $p(M_1)$, …, $p(M_\mathrm{m})$ oznaczają prawdopodobieństwa *a priori* tych modeli, np.:
  - Jednakowe (rozkład jednostajny): $p(M_1) = \ldots = p(M_\mathrm{m})$
  - Rozkład typu „brzytwy Ockhama” faworyzujący prostsze modele z mniejszą liczbą parametrów, l_i: $p(M_i) \propto 2^{-l_i}$
- Do prognozowania wybierany jest model o najwyższym prawdopodobieństwie *a posteriori*, z twierdzenia Bayesa:

$$p(M_i|\mathbf{x}) = p(M_i)\cdot p(\mathbf{x}|M_i)\,/\,\Sigma_{k\in \mathbf{M}}\,\{p(M_k)\cdot p(\mathbf{x}|M_k)\}$$

[Hoeting i in., 1999; Osiewalski, 2001]

1. Wybór modeli w ujęciu bayesowskim

Praktyka: obliczenia numeryczne

- Wybór modelu za pomocą metod MCMCMC, [Carlin i Chib, 1995] implementacja w pakiecie WinBUGS 1.4 [Spiegelhalter i in., 2003]
- Metoda: iteracyjne próbkowanie z pełnych rozkładów warunkowych dla parametrów θ_i oraz indeksu modelu μ:

$$\begin{cases} p(\boldsymbol{\theta}_i \mid \boldsymbol{\theta}_{j\neq i}, \mu, \mathbf{x}) \propto \begin{cases} p(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_i, \mu = i) \cdot p(\boldsymbol{\theta}_i \mid \mu = i) & \text{for } \mu = i \\ p(\boldsymbol{\theta}_i \mid \mu \neq i) & \text{for } \mu \neq i \end{cases} \\ p(\mu = i \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = \dfrac{p(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_i, \mu = i) \cdot p(M_i) \cdot \prod_{j\in\mathbf{M}} p(\boldsymbol{\theta}_j \mid \mu = i)}{\sum_{k\in\mathbf{M}} [p(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_k, \mu = k) \cdot p(M_k) \cdot \prod_{j\in\mathbf{M}} p(\boldsymbol{\theta}_j \mid \mu = k)]}. \end{cases}$$

- Parametry θ_i są losowane z pełnych rozkładów warunkowych gdy $\mu = i$, lub z gęstości łączących („*pseudo-a priori*”) w p.p.
- Iteracje przed osiągnięciem zbieżności są odrzucane

1. Wybór modeli w ujęciu bayesowskim

Uzasadnienie dla zastosowań w prognozach migracji

- Cechy podejścia bayesowskiego:
  - Stochastyczny charakter zapewnia formalizm wnioskowania, ze szczególnym zwróceniem uwagi na kwestię niepewności
  - Dopuszczona jest wiedza ekspercka *a priori*, która może uzupełnić informację z próby (istotne dla krótkich szeregów danych o migracjach w Europie) [np. Willekens, 1994]
- Metody formalnego wyboru modeli:
  - Sposób na uwzględnienie niepewności specyfikacyjnej
  - Użyte z odpowiednimi rozkładami *a priori* (typu „brzytwy Ockhama”) dostarczają przesłanek odnośnie stopnia złożoności modeli prognostycznych [np. Ahlburg, 1995; Smith, 1997]

2. Prognozy migracji polsko-niemieckich

Cel

Prognoza długookresowych migracji między Polską a Niemcami na lata 2005–2015 dla różnych klas modeli

Dane

- Prognozowana zmienna – logarytmy współczynników emigracji na 1,000 ludności kraju pochodzenia:

$$m_t = \ln(Mig_t / Pop_t * 1{,}000)$$

- Szeregi danych dla lat (1985–)1991–2004
- Źródła danych: stany ludności – Eurostat
  migracje – Destatis (dane niemieckie)
- Stany ludności w Polsce skorygowane po NSP ’2002

2. Prognozy migracji polsko-niemieckich

a) Proste procesy stochastyczne z klasy ARMA(1,1)

- M_1: $m_t = c + \varepsilon_t$ [losowe oscylacje wokół stałej]
- M_2: $m_t = c + m_{t-1} + \varepsilon_t$ [błądzenie przypadkowe z dryfem]
- M_3: $m_t = c + \phi\, m_{t-1} + \varepsilon_t$; $\phi \notin \{0, 1\}$ [proces AR(1)]
- M_4: $m_t = c - \theta\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$; $\theta \neq 0$ [proces MA(1)]
- M_5: $m_t = c + \phi\, m_{t-1} - \theta\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$; $\phi,\ \theta \neq 0$ [ARMA(1,1)]

Składnik losowy: $\varepsilon_t \sim \mathrm{iiN}(0, \sigma^2)$ **Próba:** 1991–2004 (N=14)

***A priori*:** stałe $c \sim N(0, 100^2)$ rozproszone (mało informacyjne)

$\phi,\ \theta \sim N(0.5, 1^2)$: procesy raczej stacjonarne / odwracalne

Niska precyzja: $\tau_{\mathrm{PL}\to\mathrm{DE}} = \sigma^{-2} \sim \Gamma(0.25, 0.25)$; $\tau_{\mathrm{DE}\to\mathrm{PL}} \sim \Gamma(4, 0.4)$

2. Prognozy migracji polsko-niemieckich

b) Rozszerzenia AR(1): zmienne wariancje warunkowe

Model ogólny: $m_t = c + \phi\, m_{t-1} + \varepsilon_t$, gdzie $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \boldsymbol{\sigma_t^2})$

- M_5: $\sigma_t^2 = \sigma^2$ [model referencyjny o stałej wariancji]
- M_6: $\sigma_t^2 = k + \alpha \cdot \varepsilon_{t-1}^2$ [proces AR(1)–ARCH(1)]
- M_7: $\sigma_t^2 = k + \alpha \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \cdot \sigma_{t-1}^2$ [model AR(1)–GARCH(1,1)]
- M_8: $\ln(\sigma_t^2) = k + \gamma \cdot \ln(\sigma_{t-1}^2) + \zeta_t$ [stochastyczna zmienność, SV]

Zmienność deterministyczna (M_6–M_7) vs. stochastyczna (M_8)

2. składnik losowy: $\zeta_t \sim \mathrm{iiN}(0, \rho^2)$ **Próba:** 1985–2004 (N=20)

***A priori*:** c, ϕ jak wyżej; z przyczyn technicznych skupione rozkłady dla: $\alpha, \beta, \gamma \sim \Gamma(10, 20)$; $k \sim \Gamma(1, 0.1)$; $1/\rho^2 \sim \Gamma(10, 1)$

2. Prognozy migracji polsko-niemieckich

c) Modele z analogią do migracji w krajach iberyjskich

Idea na uchwycenie zmian instytucjonalnych, np. akcesji do UE i otwarcia zachodnich rynków pracy [Kupiszewski, 1998]

- M_{10}: $m_t = c + \varepsilon_t$ [model referencyjny, bez analogii]
- M_{11}: $m_t = c + a \cdot m^{PT}{}_{t-18} + b \cdot \mathbf{1}_{t=2002} + \varepsilon_t$ [Portugalia]
- M_{12}: $m_t = c + a \cdot m^{ES}{}_{t-18} + \varepsilon_t$ [Hiszpania]
- M_{13}: $m_t = c + a \cdot m^{IB}{}_{t-18} + b \cdot \mathbf{1}_{t=2002} + \varepsilon_t$ [oba kraje]

Uzasadnienia: chronologia akcesji, transformacje systemowe

Składnik losowy: $\varepsilon_t \sim$ AR(1) **Próba:** 1992–2004 (N=13)

A priori: c, ϕ, τ jak wyżej, $a \sim$ N(0.5, 1^2) – dodatnia analogia

2. Prognozy migracji polsko-niemieckich

Bayesowski wybór modeli dla proponowanych klas M

Prawdopodobieństwa $p(M_i|\mathbf{x})$ dla „brzytwy Ockhama”, $p(M_i) \propto 2^{-l_i}$

Przepływ migracyjny	Modele z klasy ARMA(1,1)					Zmienna wariancja				Modele z analogią			
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}
Polska → Niemcy	**0.42**	0.29	0.14	0.11	0.03	0.12	0.10	0.05	**0.74**	**0.69**	0.07	0.14	0.10
Niemcy → Polska	0.23	**0.49**	0.16	0.08	0.03	**0.71**	0.02	0.00	0.27	**0.88**	0.01	0.09	0.02
Rozkład *a priori* $p(M_i)$	0.31	0.31	0.15	0.15	0.08	0.50	0.25	0.13	0.13	0.40	0.20	0.20	0.20

- Proste modele losowe: oscylacje / błądzenie przypadkowe
- Warunkowa wariancja stała lub zmienna stochastycznie
- Liniowe analogie nie mają uzasadnienia w danych

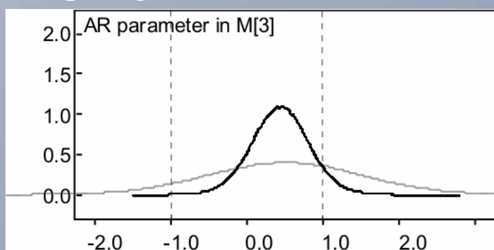
Central European Forum for Migration and Population Research

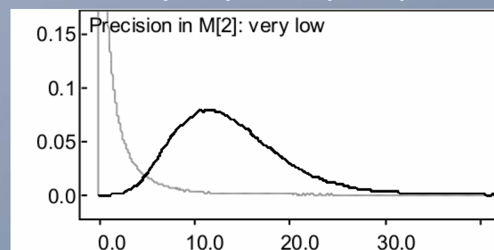
Środkowoeuropejskie Forum Badań Migracyjnych i Ludnościowych

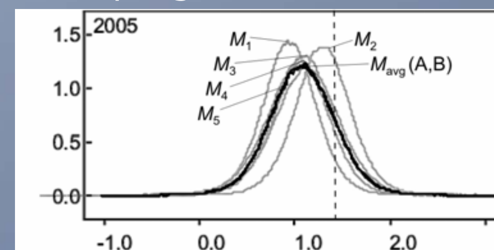
2. Prognozy migracji polsko-niemieckich

Przegląd wybranych wyników empirycznych

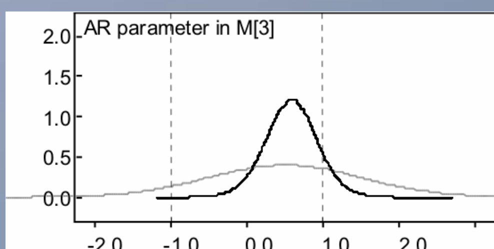
Migracje z Polski do Niemiec: rozkłady wybranych parametrów, prognoza na 2005 r.

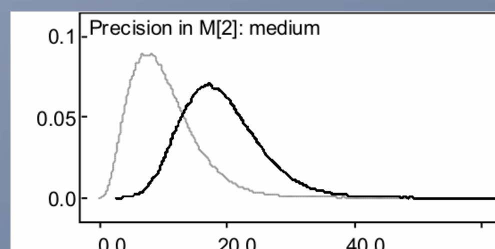


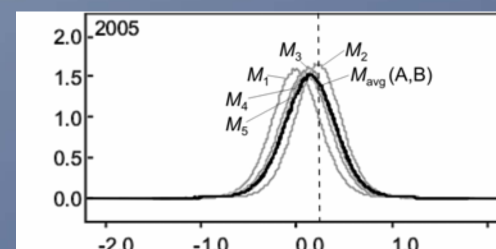




Migracje z Niemiec do Polski: rozkłady wybranych parametrów, prognoza na 2005 r.







Szare linie – rozkłady *a priori*, czarne – *a posteriori*.

Największe błędy *ex post* dla M_1, najmniejsze – M_2

2. Prognozy migracji polsko-niemieckich

Prognozy $\exp(m_t)$ dla wybranych modeli, 2005–2015

Model	Prognozowane $\exp(m_{2005})$			Prognozowane $\exp(m_{2010})$			Prognozowane $\exp(m_{2015})$		
	10%	Mediana	90%	10%	Mediana	90%	10%	Mediana	90%
Polska → Niemcy: $\exp(m_{2004})$ = **3.65;** $\exp(m_{2005})$ = **4.17**									
M_1: oscylacje	**1.77**	**2.57**	**3.72**	**1.78**	**2.57**	**3.71**	**1.78**	**2.57**	**3.72**
M_9: AR(1)–SV	**2.64**	**3.42**	**4.41**	**1.74**	**3.31**	**7.18**	**1.60**	**3.28**	**8.40**
M_{10}: bez analogii	**1.96**	**2.99**	**4.41**	**1.71**	**2.62**	**4.04**	**1.71**	**2.63**	**4.05**
Niemcy → Polska: $\exp(m_{2004})$ = **1.27 ;** $\exp(m_{2005})$ = **1.28**									
M_2: RWD	**0.91**	**1.25**	**1.71**	**0.48**	**1.18**	**2.90**	**0.28**	**1.12**	**4.36**
M_6: AR(1)	**0.90**	**1.26**	**1.76**	**0.69**	**1.24**	**2.36**	**0.63**	**1.24**	**2.71**
M_9: AR(1)–SV	*0.94*	*1.25*	*1.67*	*0.72*	*1.21*	*2.24*	*0.68*	*1.21*	*2.62*
M_{10}: bez analogii	**0.80**	**1.12**	**1.55**	**0.69**	**1.01**	**1.48**	**0.69**	**1.01**	**1.48**

- Trajektorie dla median dopuszczalne, sugerują stabilizację
- Granice 80-procentowych przedziałów również zasadne, za wyjątkiem modeli niestacjonarnych (RWD / AR z $\phi > 1$)

3. Odporność na zmiany rozkładów *a priori*

a) Jednostajny rozkład $p(M_i)$ zamiast „brzytwy Ockhama"

- Wyniki dla modeli klasy ARMA(1,1): wybrane zostały te same modele, ale z innymi prawdopodobieństwami $p(M_i|\mathbf{x})$

b) Alternatywne, referencyjne rozkłady *a priori* dla parametrów θ: rozkłady nieinformacyjne [Jeffreys, 1961]

- W zastosowaniach praktycznych, dla wygody obliczeń mogą być wykorzystane rozkłady „mało informacyjne": [Congdon, 2003]

  Dla parametrów strukturalnych: $N(0, D^2)$ przy dużych D

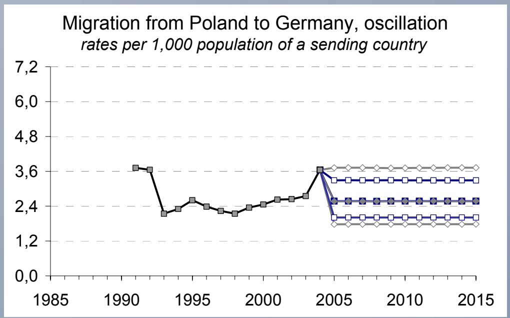
  Dla precyzji $\tau = \sigma^{-2}$: $\Gamma(a, a)$ z małymi parametrami a
- Przy $D = 100$ oraz $a = 0.001$ prognozy z modeli oscylacji, błądzenia losowego i AR(1) różnią się od „informacyjnych" prognoz zwłaszcza w odniesieniu do oszacowań niepewności

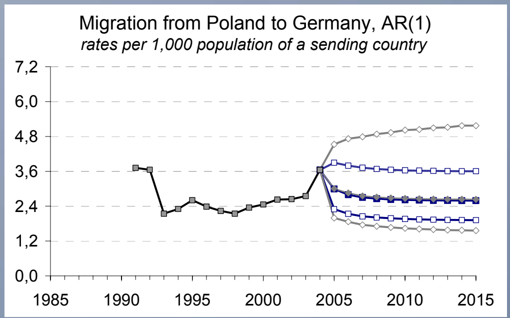
Central European Forum for Migration and Population Research

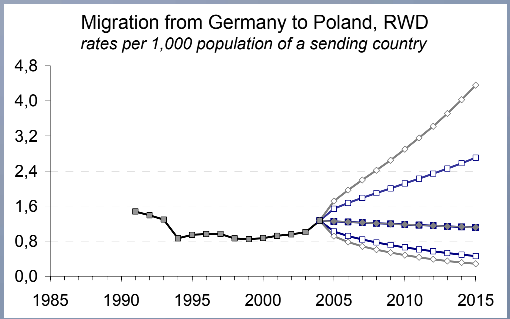
Środkowoeuropejskie Forum Badań Migracyjnych i Ludnościowych

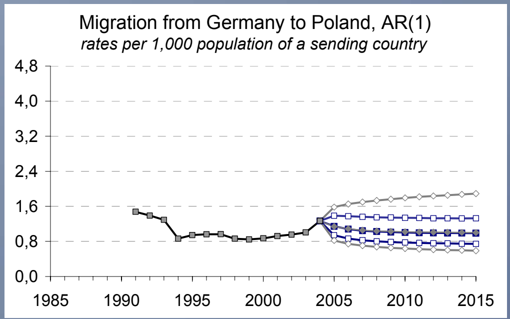
3. Odporność na zmiany rozkładów *a priori*

Wyniki: informacyjne oraz mało informacyjne rozkłady *a priori*









Bez założenia *a priori* niskiej precyzji $\tau = \sigma^{-2}$ 80-procentowe przedziały predykcyjne są często węższe od zakresu zmienności m_t w próbie

4. Podsumowanie i wnioski

- Metody bayesowskie pozwalają na identyfikację modeli najbardziej zgodnych z danymi oraz na ocenę niepewności na wielu poziomach, w tym dotyczącej specyfikacji modelu
- Wyniki empiryczne: preferencje dla modeli prostych
- Wybór oscylacji, błądzenia losowego oraz stochastycznej zmienności wskazuje na słabo przewidywalny charakter zarówno samych migracji, jak i ich miar niepewności
- Ze względu na krótkie szeregi, wyniki nie są odporne na zmiany rozkładów *a priori* (zwłaszcza dla precyzji)
- Z drugiej strony, bez założenia *a priori* o niskiej precyzji przedziały predykcyjne byłyby w wielu przypadkach zbyt wąskie, jak na tak niepewne zjawisko, jakim są migracje

Central European Forum for Migration and Population Research

Środkowoeuropejskie Forum Badań Migracyjnych i Ludnościowych

Dziękuję za uwagę!

Podziękowania za część pomysłów oraz cenne uwagi i dyskusje dotyczące przedstawionego materiału należą się prof. Jackowi Osiewalskiemu